INDUSTRIDATA AKTIEBOLAG

T Ohlin/ELL
1964-07-01

Om Boolesk algebra

IA 0.002.03 50.000 11.65 567.195

INNEHÅLL

IA C.002.03 50.000 11.65 567.105

Avd. 1 Inledning

Den nygifte unge mannen bar sin brud över tröskeln och sade: "Vi kommer att komma överens fint, bara du varje dag tänker på följande tre regler:

1:o Varje måltid du inte serverar bröd, måste du servera glass.

2:o Om du serverar både bröd och glass vid samma måltid, får du inte servera pickles.

3:o Om du serverar pickles eller om du inte serverar bröd, så får du inte servera glass".

Hur bruden reagerade inför detta förmäler inte historien, men problemet är att förenkla reglerna så långt som möjligt. Avsikten med nedanstående är bland annat att försöka delge läsaren något om vilka typer av resonemang som kan finnas till hjälp för lösning av sådana problem. Man kan hoppas, att så småningom få det att verka plausibelt, att ovanstående regler är identiska med påståendet: "Servera bröd till varje måltid men servera aldrig glass och pickles tillsammans".

Nedanstående är i huvudsak hämtat från Whitesitt: "Boolean algebra and its applications", en bok som rekommenderas åt dem, som vill tränga djupare in i ämnet. Dessutom kan nämnas Hohn: "Boolean Algebra" samt studier i symbolisk logik, som till vissa delar överensstämmer med boolesk algebra. Som rekommendationsexempel kan nämnas Maro-Mogens bok "Symbolisk logik", eller varför inte ursprunget självt, Boole's egen "An investigation of the laws of thought" från omkring 1850, där nedanstående resonemang presenterades för första gången, om också naturligt nog inte i lika lättsmält form som i t.ex. Whitesitt's bok.

För att göra det hela så tillgängligt som möjligt kan det vara lämpligt att först tala något om mängdlära, vilken i själva verket är en boolesk algebra.

St IA 0.002.03 50.000 11.65 567.155

640051

för att först sedan komma fram till en exakt definition. På så sätt blir denna definition inte alltför teoretisk, man har något en smula mera konkret att jämföra med. Till slut kan det vara lämpligt med några tillämpningar: Symbolisk logik, hur den Booleska algebran används i ALGOL samt något om teorien om grindar, 'switching algebra', dvs. hur boolesk algebra kan användas i elektrisk kretsteori.

Avd. 2 Mängdlära

1. Allmänt

Utan att gå närmare in på några rent matematiska definitioner, kan man intuitivt betrakta begreppen 'element' och 'mängd' som bekanta. Mängden t.ex. av de naturliga talen, dvs. de positiva, hela talen utgöres av de element, som vart och ett är ett positivt, helt tal. Denna mängd är oändlig, med vilket man menar, att det inte finns något tal, som är större än varje annat tal i mängden. Vilket (reellt) tal man än väljer, så kan man alltid finna ett antal tal ur mängden, som är större. Att man kan skilja på oändliga mängder, t.ex. uppräkneliga och icke-uppräkneliga, och [illegible], att en oändlighet kan betraktas som 'större' än en annan, behöver vi här ej gå in på. Det är ett gott antagande, att oändligheten är det största tal som finns och att det inte finns någon mängd, som är större än t.ex. mängden av de naturliga talen. Man kan betrakta denna mängd som en 'allmängd'.

Den mängd, vars element utgöres av samtliga elektroner i en Facit ADB-central, är visserligen en mycket stor mängd, men den är dock ändlig. Likaså är mängden av sandkorn på vår planet en mycket stor mängd, men den [illegible] också ändlig, vilket redan Arkimedes visade genom att beräkna mängden på ett för den tiden märkligt sätt (detta skedde före Kristi födelse!). Han fann mängden vara mindre än 10^{51}, och han kände inte [illegible] [illegible] för [illegible]!

St IA 0.002.03 50.000 11.65 567.165

Mängden av författare till dessa rader innehåller visserligen bara ett element, men är icke dessförty en mängd, som till sin art ej är skild från antalet sandkorn på jorden.

Mängden av mänskliga månresenärer är för närvarande exempel på vad man kallar en '<u>tom mängd</u>', även om den kanske kommer att utökas inom kort. En mängd behöver alltså inte alls innehålla några element för att få kallas mängd.

Som symboler för element användes här små bokstäver (a, b, c, ...), och symbolerna för mängder utgöres av de stora (A, B, C, ...). Dessutom införes tecknet $\in$ för att beteckna 'tillhöra', och sålunda skriver man

$$a \in A$$

för att beteckna, att elementet a tillhör mängden A. (Man får förmoda att det existerar metoder för att bestämma, om ett element tillhör en mängd eller inte.) Två mängder X och Y säges uppfylla

$$X = Y$$

om de båda innehåller exakt samma element. Man säger dessutom, att mängden X är en <u>delmängd</u> i mängden Y, om det gäller, att alla element i mängden X även är element i Y. Man skriver detta

$$X \subseteq Y$$

och om Y dessutom innehåller något eller några element, som inte ingår i X, säger man att X är en <u>äkta delmängd</u> i Y, och skriver detta

$$X \subset Y.$$

Det är även lämpligt att införa beteckningar för den <u>fulla mängden</u>, universalmängden eller allmängden, som definieras som den mängd, som innehåller samtliga betraktade element, samt den <u>tomma mängden</u>, nollmängden, som inte innehåller några element alls.

1A 0.002.03 50.000 11.65 567.185

Den fulla mängden betecknas med 1 och den tomma mängden 0. Om mängden X innehåller endast elementet x, skriver man

$$X = \{ x \} .$$

samt slutligen definieras komplementet till X som den mängd, som innehåller alla element i den fulla mängden, som inte ingår i X. Komplementet skrives X'.

För att redan på detta tidiga stadium uppöva läsarens logiska sinnelag, kan det här vara lämpligt att titta på ett välkänt men icke desto mindre intressant problem:

Problem 1

Tre personer befinner sig i en tågkupé på väg genom England. Eftersom man ofta har fönstren öppna i detta land, när man åker tåg, blir efter ett tag alla tre vänligen sotiga i ansiktet, något som de emellertid inte märker själva, eftersom det sker successivt, och inte alla tåg har ånglok nu för tiden. De sitter alla djupt försjunkna i sina lektyrer, och då till slut en av dem tittar upp, kan han inte låta bli att dra på munnen åt den lustiga synen som möter honom. Även de båda andra ser då upp och börjar skratta. Man kan här utgå från att ingen är ofin nog att med sitt skratt direkt vända sig till någon annan, utan förutsättningen är, att var och en tror sig själv vara ren i ansiktet, och att de båda andra skrattar åt varandra.

Denna situation varar en stund. Därefter kommer en av dem fram till, att han själv måste vara sotig i ansiktet, tar upp sin näsduk, torkar sig och finner sitt antagande vara riktigt. Hur kunde han komma fram till detta?

([illegible])

2. Kombination av mängder

Man definierar unionen av X och Y som den mängd, som utgöres av de element som tillhör antingen X eller Y eller båda. Som tecken för att symbolisera union väljes här plustecken, alltså skrivs unionen av X och Y

$$X + Y$$

där man dock bör hålla i minnet, att + inte har att göra med vanlig addition, utan här definierar en ny relation.

På motsvarande sätt definieras skärningen mellan X och Y som den mängd, som innehåller de element, som tillhör både X och Y. Skärningen mellan X och Y skrivs

$$X \cdot Y \text{ eller } XY$$

och har alltså inget samband med vanlig multiplikation.

I litteraturen förekommer ingen entydighet beträffande dessa symboler, utan för union används även $\cup$ och $\vee$ samt för skärning $\cap$ och $\wedge$. Man ser även (förutom apostrof) för komplementet till X skrivsätten $\bar{X}$ och $\sim X$.

Man kan nu direkt ställa upp följande enkla relationer:

$$X + X' = 1$$
$$XX' = 0$$

gällande för en godtycklig mängd X.

Tyvärr är dessa symboler inte [illegible] vilket kan inses t.ex. genom att se på

$$X \subseteq Y$$
$$XY = X$$
$$X + Y = Y$$
$$XY' = 0$$
$$X' + Y = 1.$$

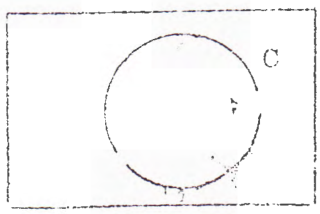
IA 0.022.03 50.000 11.65 567.135

Eftertanke ger här vid handen, att samtliga dessa ekvationer innebär det faktum att X är en delmängd i Y. Det är alltså tydligt, att här har införts alltför många symboler. Dock är det lämpligt att vänta med diskussion av detta till avsnittet om den exakta definitionen av en Boolesk algebra. Tills vidare behålls samtliga dessa symboler.

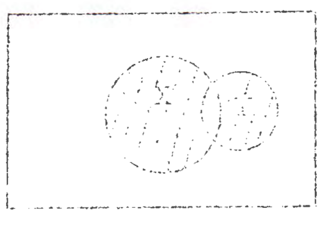
3. Venn-diagram

För att förstärka den intuitiva bilden av mängdbegreppet kan man införa tvådimensionella illustrationer. Införandet av dessa s.k. Venn-diagram kommer inte att innebära att den formella grunden för begreppen på detta stadium blir fastare, men de åskådliggör på ett tydligt sätt lagarnas innebörd.

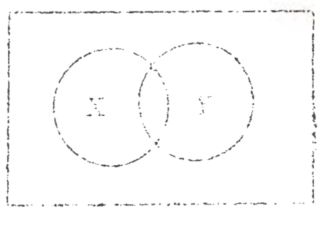
Ett Venn-diagram består av en rektangel, eventuellt hela papperet, föreställande universalmängden, i vilken olika mängder inritas som innandömen av enkla, slutna kurvor (t.ex. cirklar, ellipser etc.). Inom dessa områden representeras element av punkter. Man kan alltså säga, att allt, som ligger innanför och på konturen C i fig. nedan representerar mängden X.



Man får på detta sätt en enklare intuitiv innebörd i begreppen X + Y, XY, X' osv.

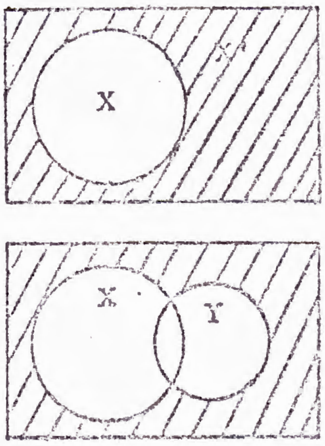


X + Y



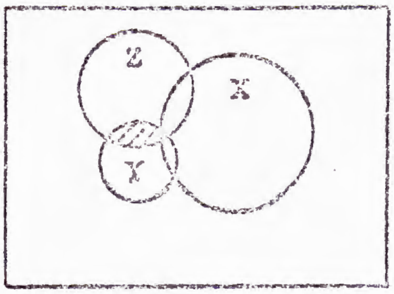
XY

IA 0.002.03 50.000 11.65 567.185

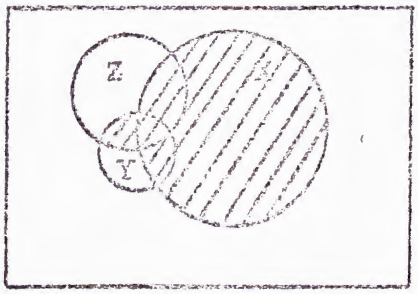


$X'Y' = (X + Y)'$

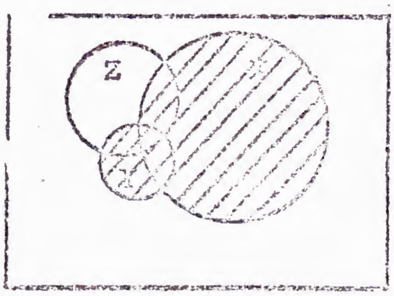
För att t.ex. göra lagen $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$ plausibel kan man förfara på nedanstående sätt:



YZ

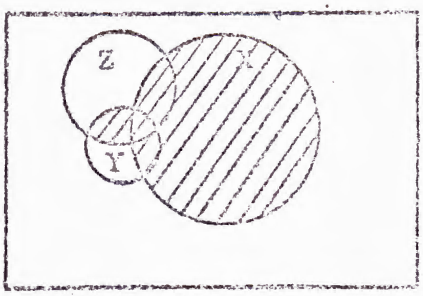


$X + YZ$



$X + Y$

$X + Z$



$(X + Y)(X + Z)$

4. Fundamentala lagar

Med användande av de införda begreppen kan nu formuleras följande fundamentala lagar. (De bevisas ej här, men åskådliggöres på ett instruktivt sätt med hjälp av Venn-diagram):

Kommutativa lagar

$XY = YX$ $\qquad$ $X + Y = Y + X$

Associativa lagar

$X(YZ) = (XY)Z$ $\qquad$ $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

Distributiva lagar

$X(Y + Z) = XY + XZ$ $\qquad$ $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$

Tautologier

$XX = X$ $\qquad$ $X + X = X$

Absorbtionslagar

$X(X + Y) = X$ $\qquad$ $X + XY = X$

Komplementlagar

$XX' = 0$ $\qquad$ $X + X' = 1$

Dubbla komplement-lagen

$(X')' = X$

de Morgan's lagar

$(XY)' = X' + Y'$ $\qquad$ $(X + Y)' = X'Y'$

Operationer med konstanterna 0 och 1

$0X = 0$ $\qquad$ $0 + X = X$

$1X = X$ $\qquad$ $1 + X = 1$

$0' = 1$ $\qquad$ $1' = 0$

Dessa lagar kan naturligtvis generaliseras till flera ingångar än 2. Så kan t.ex. de Morgan's lagar allmänt skrivas

$$\Big(f(0,\ 1,\ \cdot,\ +,\ X,\ Y,\ Z,\ \ldots)\Big)' = f(1,\ 0,\ +,\ \cdot,\ X',\ Y',\ Z',\ \ldots)$$

St IA 0.000.33 50.000 11.65 567.185

Man kan här lägga märke till en intressant egenskap hos mängdläran, kallad <u>dualitetsprincipen</u>, vilken innebär, att om i en godtycklig identitet varje element utbytes mot sin 'motsats' (0 mot 1, 1 mot 0, · mot +, + mot ·, X mot X' etc) så förblir identiteten giltig. Detta är i själva verket en egenskap som utmärker varje Boolesk algebra.

<u>5. Delmängd-begreppet</u>

Det tidigare införda begreppet delmängd (symbolen $\subseteq$) kan nu införas i diskussionen, och leder till möjligheten att formulera teorem som t.ex.

1. Om $X \subseteq Y$ och $Y \subseteq Z$ så $X \subseteq Z$.

<u>Bevis:</u> Låt x vara ett godtyckligt element i X. Eftersom $X \subseteq Y$ gäller då $x \in Y$. På samma sätt följer ur $Y \subseteq Z$ att $x \in Z$. Men x var godtyckligt i X. $\therefore X \subseteq Z$.

Utan bevis anföres här även följande teorem:

2. Om $X \subseteq Y$ och $X \subseteq Z$ så $X \subseteq YZ$.

3. Om $X \subseteq Y$ så $X \subseteq Y + Z$ för varje Z.

4. $X \subseteq Y$ om och endast om $Y' \subseteq X'$.

Med hjälp av dessa och liknande teorem kan nu formuleras satser och regler för <u>villkorliga ekvationer</u>, dvs. ekvationer som inte är identiteter, utan som är uppfyllda endast för vissa speciella [illegible]. Att gå in på dessa i detalj skulle föra för långt. Det får räcka med påpekandet att inte ens de allra enklaste ekvationer vanligen har unika lösningar, och att ekvationslösning därför spelar en underordnad roll i mängdläran.

11.5102.03 50.000 11.65 567.155 TARTO

6. Antal element i mängder

Många tillämpningar av mängdläran, särskilt sannolikhetsläran, sysslar med begrepp som rör antal element i mängder. Låt oss kalla antalet element i mängden X för n (x).

Antag nu, att vi har två mängder A och B, för vilka gäller n(A) = 50 och n(B) = 100. Vad kan då sägas om n(A+B) resp. n(AB)? Uppenbart är, att om A och B inte har något gemensamt element, så är n(A+B) = 150 och n(AB) = 0. Allmänt kan bara sägas, att $100 \leq n(A+B) \leq 150$ med n(A+B) = 100 om $A \subseteq B$. På samma sätt gäller $0 \leq n(AB) \leq 50$ med n(AD) = 50 om $A \subseteq B$.

Man säger, att X och Y utesluter varandra om de inte har något gemensamt element, och då gäller

$$n(X + Y) = n(X) + n(Y);$$

Detta är ett specialfall av den allmänna sats, som säger att för godtyckliga X och Y gäller

$$n(X + Y) = n(X) + n(Y) - n(XY)$$

vilket bör kunna bevisas av den intresserade. (Rita även upp ett Venn-diagram!)

Exempel: Är det möjligt, att i en skolklass på 25 elever, 14 st har slöjd som tillvalsämne, 19 st har spanska och 6 st har både slöjd och spanska?

Svar: Nej, ty 14 + 19 - 6 = 27 som är > 25.

Denna sats kan läggas till grund för ett viktigt teorem i sannolikhetsläran. Om man låter samtliga element i en mängd representera de möjliga utfallen på ett visst försök, och därur väljer en delmängd, ett sample, som utgöres av de element, som representerar de för tillfället gynnsamma utfallen på försöket, och håller i minnet den klassiska definitionen på sannolikhet

$$P = \frac{\text{antal i gynnsamma fall}}{\text{antalet möjliga fall}}$$

inser man att man genom att dividera med "antalet möjliga fall", dvs. totala möjlighets-mängden, i föregående ekv. erhåller

$$P(X + Y) = P(X) + P(Y) - P(XY)$$

TA 0.002.03 50.000 11.65 567.185

Problem 2

(Detta problem kan anses relativt svårt.)

Två personer A och B hade slagit vad, och A hade vunnit 10 kr. I stället för att nu kräva B på sin vinst, föreslog han, att de skulle singla slant om hur stor vinsten skulle bli. Förlorar B det första kastet, så ska B betala A 2 kr och så singlas slant en gång till. Vinner däremot B, behöver han inte betala någonting alls. Om nu B förlorade det första kastet, och slanten alltså singlas än en gång, gäller att om B då vinner, slipper han betala mera, alltså en total förlust för honom på 2 kr. Förlorar B däremot, måste han betala A 4 kr, och så sker ett tredje kast med samma förutsättningar förutom att B denna gång i värsta fall måste betala 8 kr osv.

Problemet är nu att från början räkna ut, hur mycket B är skyldig A utan att verkställa själva singlingen (dvs. beräkna A:s matematiska förväntan). Resonemanget till går så här:

Vid det första kastet slipper B betala, om han vinner, men ska betala 2 kr om han förlorar, och då spelas igen. Det är alltså 50% chans att han ska förlora 2 kr (sannolikheten för förlust = 0.5) och man kan ersätta detta kast med att han betalar 50% av 2 kr = 1 kr och i stället börjar med det andra kastet. Vid detta kast gäller också 50% chans att behöva betala, men denna gång 4 kr. Chansen att behöva betala även denna gång är alltså 50% av 50% (sannolikheten = 0.5 · 0.5 = 0.25) och man kan ersätta detta kast med att han betalar 50% av 50% av 4 kr = 1 kr. På detta sätt fortsätter beräkningen, och han får alltså totalt en skuld till A på 1 + 1 + 1 + 1 + ... kr, vilket ju i sanning verkar avskräckande. Är detta resonemang riktigt?

Avd. 3 [illegible]

1. [illegible]

IA 0.002.03 50.000 11.65 587.185

använder symbolen $\circ$, vilken tillsvidare får beteckna en godtycklig operation.

<u>Definition:</u> En <u>binär operation</u> $\circ$ på en mängd M är en regel, som till varje par av element (a, b) i M tillordnar det unika elementet c = a $\circ$ b i M.

Ett exempel på detta kan anföras: Subtraktion är en binär operation på mängden av hela tal, men inte på mängden av positiva tal (ty en subtraktion kan ge negativt resultat, och detta tillhör då inte mängden).

<u>Definition:</u> En binär operation $\circ$ på en mängd M är <u>associativ</u>, omm (om och endast om) för varje a, b och c i M det gäller

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

<u>Definition:</u> En binär operation $\circ$ på en mängd M är <u>kommutativ</u>, omm för varje a och b i M det gäller

$$a \circ b = b \circ a.$$

<u>Definition:</u> Om $\circ$ och $*$ är två binära operationer på en och samma mängd M sägs $\circ$ vara <u>distributiv</u> över $*$ omm för varje a, b och c i M det gäller

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c).$$

Från mängdläran kan här noteras, att union och skärning är både associativa och kommutativa, samt att var och en är distributiv över den andra, det sista innebär [illegible]

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

Slutligen införes det viktiga elementet <u>enhet</u> med följande definition:

<u>Definition:</u> Ett element e i en mängd M är en <u>enhet</u> [illegible] den binära operationen $\circ$ omm för varje [illegible] [illegible]

I mängden av hela tal är 0 en enhet för operationen addition, och 1 en enhet för multiplikation. Huruvida det existerar flera sådana enheter lämnas i detta sammanhang öppet.

2. Definition av och egenskaper hos en Boolesk algebra

Bland möjliga sätt att ge en strikt definition av en Boolesk algebra väljes följande:

<u>Definition</u>: En klass element B tillsammans med två binära operationer + och · (där a · b skrives ab) är en Boolesk algebra omm

P1 Operationerna (+ och ·) är kommutativa.

P2 Det finns i B enhetselement 0 resp. 1 motsvarande operationerna + resp. ·.

P3 Varje operation är distributiv över den andra.

P4 För varje element a i B existerar a' i B så att

$$a + a' = 1 \text{ och } aa' = 0.$$

Här är alltså att notera, att det inte finns något som tvingar en att välja just + och · som symboler för operationerna. Vilka två symboler som helst hade gått lika bra, t.ex. ∘ och ∗ eller ∩ och ∪.

Man kan omedelbart notera, att mängdalgebran uppfyller alla dessa postulat, och alltså är en Boolesk algebra. Omvänt kan man bevisa, att varje Boolesk algebra uppfyller alla krav för att vara en mängdalgebra för delmängder av universalmängd. Tagande detta för sant, hade man alltså, om resonemangen om mängdläran från det föregående här hade vilat på en strängare formell grund, därför kunnat överflytta diverse resultat därifrån till Boolesk algebra. Eftersom emellertid mängdläran i det föregående ej definierad exakt, utan lades på en mera intuitiv grund, [illegible] någon sådan överflyttning här ej göras.

[illegible]

IA 0.002.03 50.000 11.65 567.185

laten för en Boolesk algebra förblir giltig, om operationerna + och · resp. enhetselementen 0 och 1 utbytes mot varandra. (Dualitetsprincipen.)

Beviset följer direkt om man noterar den symmetri, med vilken + och · resp. 0 och 1 uppträder i postulaten.

<u>Teorem</u>. För varje element a i en Boolesk algebra B gäller

$a + a = a$ och $aa = a$.

<u>Bevis</u>.

$a = a + 0$ (P_2)

$a + 0 = a + aa'$ (P_4)

$a + aa' = (a + a)(a + a')$ (P_3)

$(a + a)(a + a') = (a + a)(1)$ (P_4)

$(a + a)(1) = a + a$ (P_2)

$aa = a$ följer sedan ur dualitetsprincipen.

V.S.B.

För grundläggande teorem som det ovannämnda är alltså bevisföringen enkel och lättfattlig. För andra kan den emellertid i motsvarande grad bli knepigare, och det får i detta sammanhang räcka med en uppräkning nedan av några viktiga resultat:

$a + 1 = 1$ och $a0 = 0$

$a + ab = a$ och $a(a + b) = a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$ och $a(bc) = ab(c)$

dvs. operationerna + och · är associativa.

Till varje a är a' unikt.

$(a')' = a$

$0' = 1$ och $1' = 0$

$(ab)' = a' + b'$ och $(a + b)' = a'b'$

(de Morgan's lagar)

[illegible]: För varje a och b [illegible]

[illegible]

Med hjälp av symbolen $\subseteq$ kan man nu formulera satser, motsvarande de i mängdläran omnämnda, som t.ex.

Om $x \subseteq y$ och $y \subseteq z$ så $x \subseteq z$.

Det är dock onödigt att här gå in på dessa. De liknar i allt väsentligt mängdlärans teorem.

3. Booleska funktioner

Först införes begreppet en konstant i en Boolesk algebra. Med en konstant menar man en symbol, som representerar ett specificerat, fixerat element. 0 och 1 är exempel på konstanter. Med en variabel syftas på en bokstavssymbol x, y, etc. som används för att representera ett godtyckligt eller icke fixerat element.

Med hjälp av dessa introduceras sedan en Boolesk funktion, varmed menas ett uttryck, som representerar kombinationer av en ändlig mängd symboler, var och en representerande en konstant eller en variabel, med hjälp av operationerna (+), (·) eller ('). Sålunda är t.ex. $(a' + b)'c + ab'x + 0$ en Boolesk funktion om a, b, c och x är element i en Boolesk algebra. Ekvationen $x + x' = 1$ innebär att funktionen $x + x'$ av variabeln x är lika med konstanten 1.

Följande sats är av intresse i detta sammanhang:

Teorem. För att fastställa en godtycklig identitet i en Boolesk algebra är det tillräckligt att kontrollera värdena för varje ingående funktion för alla kombinationer av 0 och 1 som kan ges åt de ingående variablerna.

(För beviset hänvisas till Whitesitt's bok.)

Låt oss undersöka om $x + x' = 1$ gäller oberoende av värdet på x. För $x = 0$ blir vänstra ledet $0 + 0' = 0 + 1 = 1$, alltså = högra ledet. För $x = 1$ blir vänstra ledet $1 + 1' = 1 + 0 = 1$ alltså [illegible] = 1 [illegible] alltid [illegible].

IA 0.002.03 50.000 11.65 567.185

(På grund av det begränsade antalet konstanter är det alltså avsevärt enklare att konstatera likheter i en Boolesk algebra än t.ex. i konventionell reell funktionslära. Där har man ju att göra med ett icke begränsat antal möjliga värden hos variablerna. Detta har lett till att andra metoder än prövning och insättning där har fått större utrymme.)

Härmed har en presentation av något om byggstenarna och innehållet i en Boolesk algebra givits. Enbart det allra viktigaste har medtagits, men förhoppningen är, att denna introduktion skall vara tillräcklig. Därför övergås nu till några tillämpningar, varav först ska diskuteras något om symbolisk logik.

Allra först emellertid ytterligare något huvudbry:

Problem 3

I en bassäng (t.ex. en sluss) befinner sig en pråm, lastad med järnskrot. Av någon anledning kastar man skrotet överbord, så att pråmen till slut är tom. Frågan är: Påverkar detta vattenståndet i bassängen?

Avd. 4 Symbolisk logik

1. Inledning

Avsikten med detta avsnitt är på intet sätt att ge en tillnärmelsevis fullständig behandling av i den symboliska logiken, utan endast att plocka fram några resultat som kan vara av intresse i detta sammanhang.

Utan diskussion kommer först att införas termerna: påstående, sann och falsk. Dessa är grundstenar i den symboliska logiken. Med ett påstående avses då den verbala meningen av en sats, som är meningsfull och har egenskapen att vara antingen sann eller falsk, men inte bådadera. Med hjälp av dessa grundstenar byggs sedan upp en påståendealgebra, som visar sig uppfylla kraven för en Boolesk algebra.

IA 0.002.03 50.000 11.65 567.185

Exempel på påståenden är:

"Talet 3 är ett primtal".

"Om man adderar 4 och 3 får man 7".

"Vispgrädde är en frukt från ett träd, som odlas på Ceylon".

Med hjälp av sådana påståenden, betecknade med bokstäver p, q, r, ..., bygger man upp andra eller sammansättningar av påståenden. Den enklaste är p:s negation, betecknad ¬p, som definieras som

"det är osant att p."

(Orden osant och falskt kommer här att användas om varandra med samma innebörd.) Om p är sann så är ¬p falsk och vice versa.

2. Sammansättningar

Både p och q kallas konjunktionen av p och q och skrivs $p \wedge q$. Den definieras som sann, om både p och q är sanna, annars falsk.

Antingen p eller q kallas disjunktionen av p och q och betecknas $p \vee q$. Den definieras som påståendet att antingen p eller q eller båda är sanna. Detta påstående skall vara sant när någon av eller både p och q är sanna, och falskt endast när både p och q är falska.

Dessutom införes begreppet implikation. Man säger, att "p implicerar q" eller "om p så q" och skriver $p \supset q$ (enligt Algol-konventionen) om det gäller att "antingen icke p eller q".

$p \supset q$ innebär alltså $\neg p \vee q$

Man lägger ingen annan innebörd än den ovan nämnda i implikationen. Den innebär alltså inte, att p är orsak till eller att q logiskt kan härledas från p. Som exempel kan anföras den sanna implikationen, att

om talet 6 är ett udda tal [illegible]

[illegible]

IA 0.002.03 50.000 11.65 567.165

Enligt definitionen är alltså $p \supset q$ ett sant påstående alltid utom när p är sann och q är falsk.

Det är också bekvämt att införa begreppet ekvivalens. Påståendet "p är ekvivalent med q" skrives $p \equiv q$ och definieras som sant när både p och q är sanna eller när både p och q är falska, annars falskt.

3. Sanningstabeller

Efter införande av konstanterna 0 och 1 i påståendealgebran, 0 innebärande något som alltid är falskt och 1 innebärande något som alltid är sant, är det mycket överskådligt att sammanställa resultat från det föregående i en sanningstabell enligt nedan:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Med hjälp av sådana tabeller kan man på ett enkelt sätt bevisa samband som t.ex. $p \vee q \wedge r = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ helt enkelt genom att gå igenom alla möjliga sanningsvärden för p, q, resp. r.

Begreppet tautologi införes här i och med att man säger, att ett påstående är en tautologi, om den enbart har ettor som sanningsvärden. En tautologi är alltså ett påstående, som alltid är sant, t.ex. $p \vee \neg p$. Ett påstående som däremot alltid är falskt, sägs vara en motsägelse eller kontradiktion.

På detta stadium är det redan en smula [illegible] att bekräfta, att algebran om påståenden [illegible]. Det är lätt att se efter, [illegible]

St
IA 0.002.03 50.000 11.65 567.185 TRYCK

Problem 3

En logiker kidnappades av ett gäng banditer och placerades med en bindel för ögonen ensam i ett låst rum. I rummet fanns två lådor, av vilka den ena innehöll nyckeln till rummet och den andra en giftorm. Han skulle öppna en av lådorna, vilken som helst, och om han där fann nyckeln, skulle han få använda den och släppas fri. Till hjälp fick han ställa en fråga att besvaras med ja eller nej till en av banditerna, men denne behövde alls inte tala sanning, när han svarade, han kunde också ljuga.

Efter någon eftertanke ställde logikern en fråga, fick ett svar, sträckte ner handen i en av lådorna och tog upp nyckeln. Därefter släpptes han fri. Problemet är: Vilken fråga ställde han?

4. Indirekt bevis

Med en indirekt bevisföring menar man att i stället för att visa att ett visst påstående är sant bestämmer man sig för att visa, att motsatsen är falsk. Som exempel kan anföras ett bevis för att ekvationen $X^2 = 2$ inte kan satisfieras av något rationellt tal $\frac{p}{q}$ (där p och q är heltal). Det gäller alltså att visa att motsatsen är falsk. Antag då, att det rationella talet $\frac{p}{q}$ verkligen uppfyller ekvationen. Förkorta då först talet $\frac{p}{q}$ så långt som möjligt, så att ett tal $\frac{r}{s}$ erhålles, där r och s inte har någon gemensam divisor. Om detta tal nu satisfierar $X^2 = 2$, gäller alltså $r^2 = 2s^2$. Men av detta följer, att varje primtalsdivisor till s också är divisor till r. Här erhålles alltså en motsägelse till vad som ovan sades, nämligen att r och s inte har någon gemensam divisor. Motsatsantagandet måste alltså vara falskt, och ekvationen $X^2 = 2$ har ingen rationell rot. (Dess rötter är reella; de reella talen tillhör en större talklass än de rationella.)

[illegible]

IA 0 002.03 50.000 11.65 567.185 TRYCK

Problem 5

En upptäcktsresande kommer till en ö, som bebos endast av infödingar. Dessa har alla svart hudfärg, men somliga av dem har dock vitt påbrå, ty vita män har tidigare tillbringat långa tider på ön. Man vet nu, att alla 'vita' infödingar ljuger och att alla 'svarta' infödingar talar sanning. Upptäcktsresanden ämnar nu anställa en inföding i sitt följe och vill då naturligtvis ha en pålitlig sådan, dvs. en 'svart'. Därför ställer han upp tre infödingar i rad på stranden och frågar den första: "Är du 'vit' eller 'svart'?" Emellertid talar infödingen inte riktigt ur skägget, och upptäcktsresanden uppfattar inte vad han sade. Därför frågar han den andra infödingen: "Vad sade din kamrat?" och svaret blir: "Han sade att han var 'vit'" medan samma fråga ställd till den tredje infödingen ger svaret: "Han sade att han var 'svart'. Vilken inföding skall upptäcktsresanden välja?

5. Några paradoxer

Under långa tider har florerat olika tillämpningar av vad som i symboliska logiken brukar kallas 'reductio ad absurdum', nämligen följande:

$$(p \supset \neg p) \supset \neg p$$

Många har väl någon gång träffat på uttrycket: "Epimenides säger, att alla kretensare ljuger". Men Epimenides är själv kretensare. Alltså ljuger han. Alltså ljuger inte alla kretensare osv.

Ett otal versioner av detta sätt att resonera har påhittats. Här är ett par till:

1. Alla regler har undantag.

2. En barberare sade: Jag rakar alla män i byn, som inte rakar sig själva, men jag rakar naturligtvis inte dem, som rakar sig själva. Men [illegible], rakar han sig själv eller ej?

[illegible]

IA 0.002.03 50.000 11.65 567.183

3. Protagoras undervisade en elev i lagkunskap och lät eleven vänta med betalningen för detta tills han hade vunnit sitt första mål. Efter avslutade studier vägrade emellertid några klienter att infinna sig hos eleven, och till slut beslöt sig Protagoras för att stämma eleven för underlåtenheten att betala sin skuld.

Ty, sade Protagoras, antingen vinner jag målet, och då får du betala mig enligt domen, eller också vinner du, och då måste du betala mig enligt vår överenskommelse.

Inte alls, svarade eleven, antingen vinner jag, och då slipper jag betala enligt domen, eller så förlorar jag, och då slipper jag betala enligt vår överenskommelse. Vilken av de båda hade rätt?

Bertrand Russell, den store engelske matematikern och logikern, har levererat följande paradoxer:

4. För elementen x i en mängd M gäller, att "$x \in M$ om $x \notin x$". ($\in$ betyder 'tillhör' och $\notin$ 'tillhör inte'). Finns något element, som tillhör denna mängd?

5. En bestämning kallas predikabel om den kan sägas predicera om sig själv, samt impredikabel om så ej är fallet. Bestämningen 'tänkbar' är t.ex. predikabel (det är rimligt, att bestämningen 'tänkbar' är tänkbar), medan bestämningen 'röd' är impredikabel (det är orimligt att påstå, att bestämningen 'röd' är röd).

Den s.k. Russelska paradoxen lyder nu: "Är bestämningen 'impredikabel' själv predikabel eller impredikabel?" Är den predikabel, så är den impredikabel och vice versa, blir resultatet av en enkel [illegible].

Många paradoxer liknande dessa visar sig existera på grund av att vi [illegible]

Uppställande av logiska modeller, där dylika irriterande paradoxer icke kan existera, är exempel på vad den symboliska logiken har sysslat med under senare tid.

(Vid detta stadium bör ett systematiskt angripande av problemet med den nygifta mannens tre regler från avd. 1 kunna ge resultat. För lösningen se problemsvaren mot slutet: Problem 6.)

Avd. 5 Tillämpning i Algol

Som bekant kan samtliga av symbolerna $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ utan vidare användas vid programmering i Algol. Det förefaller dock som om dessa finesser inte vanligen kommer till användning emedan alternativa uttryckssätt för det mesta kan formuleras. Många gånger kan emellertid den Booleska algebran ge smidigare program, varför en rekommendation här utgår, att inte undvika denna möjlighet.

Viktig att hålla i minnet är naturligtvis prioritetsregeln för Algol: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$.

Här följer ett om än något speciellt så dock försök till exempel på ett program där samtliga dessa symboler kommer till användning:

```
begin
comment      Varje morgon stansar husmor en dataremsa
             med fyra tal, som visar vilka av dessa
             fyra: dryck, kött, fisk, dessert hon har
             hemma. +1 betyder finns, +0 betyder finns
             ej. Programmet köres, och kommenterar da-
             gens inköp etc.;
integer      a, b, c, d;
boolean      dryck, kött, fisk, dessert, lunch, middag;
             tapecode (0, 1, 1, 0);
             read (a, 4);
dryck := a = 1;
             if a = 1 then dryck: = true else
                   dryck: = false;
```

```
if b = 1 then kött: = true else
      kött: = false;
if c = 1 then fisk: = true else
      fisk: = false;
if d = 1 then dessert: = true else
      dessert: = false;
lunch: = kött ∨ fisk;
middag: = lunch ∧ dessert;
if ¬lunch then printtext (// vr köp
ms mera ms mat.//);
if ¬(middag ⊃ dryck) then
printtext (// vr köp ms dryck ms till
ms middagen.//);
if dryck ≡ dessert then
printtext (//vr om ms middag ms serveras,
ms så ms finns ms dryck.//);
```

end

Problem 7

En man färdas med åsneskjuts genom Afrika, och kommer till ett vägskäl, där vägen delar sig i två, en till höger och en till vänster. Vid vägskälet sitter en infödding, som har egenheten att varannan gång tala sanning och varannan gång ljuga. Problemet är nu, att mannen med en fråga till infödingen skall kunna lista ut, vilken av de båda vägarna, som bär till Kairo. Hur lyder denna fråga?

Avd. 6 Teori för grindar

1. Inledning

Teorin för grindar (eng. [illegible] algebra) har på senare tid tilldragit sig det allra största intresset bland tillämpningarna av den Boolska algebran. [illegible] har blivit [illegible] på grund av de förenklingsmetoder, som med dess hjälp blivit möjliga, [illegible] av den [illegible]

St IA 0.002.03 50.000 11.65 567.185

I detta sammanhang kommer endast att nämnas något om de allra enklaste elektriska kretsarna, nämligen de som endast innehåller grindar. Vi bortser alltså från all sorts energialstrande eller energiförbrukande apparatur. Vi bekymrar oss inte heller om huruvida grindarna själva förbrukar någon energi eller ej.

Varje grind betecknas med en bokstav a, b, c, ... Om två grindar opererar så att den ena är öppen, när den andra är sluten, och vice versa, betecknas den andra med x' om den första betecknas med x. En krets, som består av två grindar x och y, kopplade parallellt med varandra, betecknas x + y och en som är en seriekoppling betecknas xy. Till varje serie-parallellkrets finns då ett motsvarande algebraiskt uttryck, innehållande endast (+), (.) och ('), och till varje sådant uttryck finns en motsvarande krets. Man säger att detta uttryck, denna funktion, <u>representerar</u> kretsen, och att kretsen <u>realiserar</u> funktionen.

En sluten grind kommer att tilldelas värdet 1 och en öppen värdet 0. Om både a och a' existerar, gäller

$a = 1$ om $a' = 0$.

Två kretsar sägs vara <u>ekvivalenta</u> om öppnings- och slutningsförhållandena för kretsarna är lika för vilken given position hos grindarna som helst.

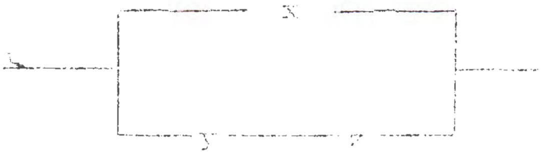
<u>2. Lagar för kretsar med grindar</u>

Det är nu möjligt, att kontrollera att postulaten för Boolesk algebra är uppfyllda i detta tillämpningsområde, och man kan därför överflytta resultat från det tidigare direkt hit. En överskådlig bild av förloppen ger figurer och tabeller t.ex. enligt nedan:

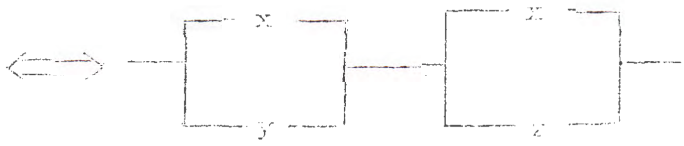
IA 0.002.03 50.000 11.65 537.185

xy

x + y



x + yz



(x + y)(x + z)

(Distributiva lagen för (+) över (.)).

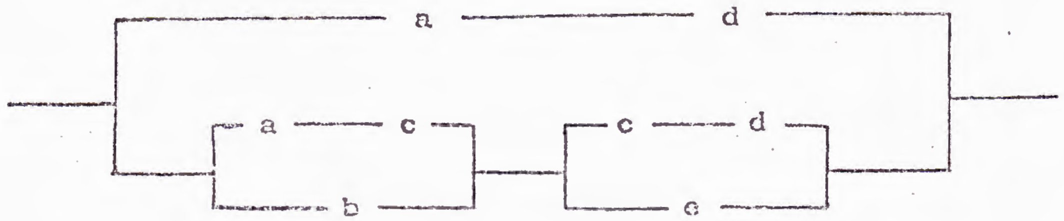
a	b	a'	ab	a+b
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Öppning-slutning för a', ab, a+b.

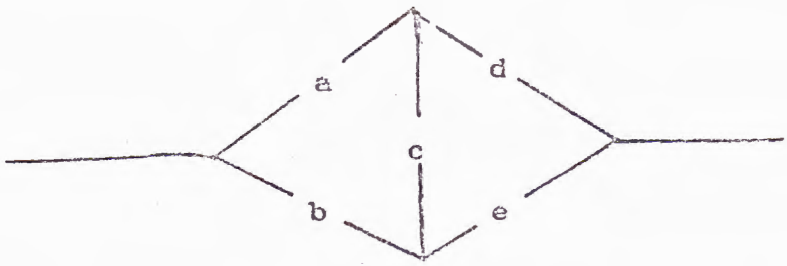
Tabellen ovan överensstämmer fullständigt med motsvarande sanningstabell från det tidigare, och det är uppenbart, att analogin medför stora förenklingsmöjligheter. För att undersöka huruvida en given krets går att realisera på enklare sätt, med bibehållande av sina öppnings-slutningsförhållanden, översätter man alltså kretsen till sin grindfunktion och söker förenkla denna rent algebraiskt (booleskt), varefter sedan den ev. förenklade funktionen realiseras.

Det är inte alltid geometriskt fullt klart, hur realiseringen av en funktion egentligen ser ut. Tag t.ex. nedanstående krets:

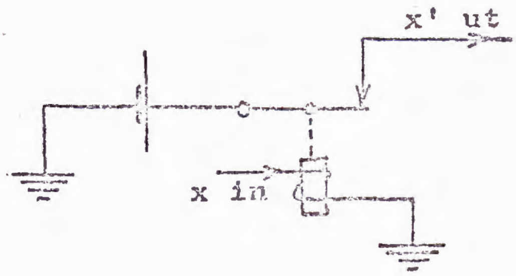
IA 0.002.03 50.000 11.65 567.155

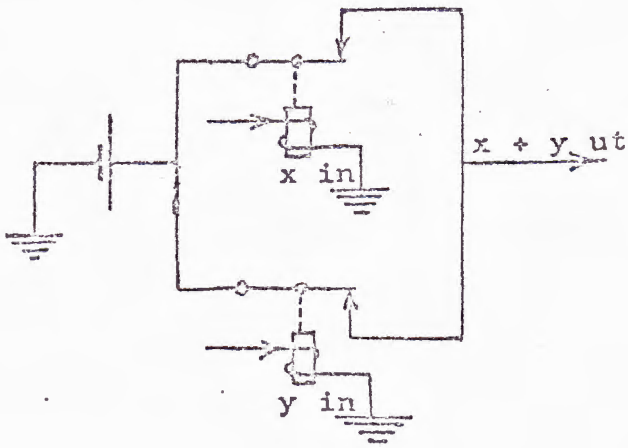


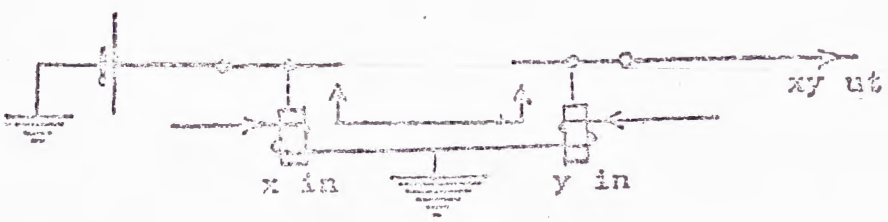
Denna krets har uppenbarligen funktionsmotsvarigheten $f = ad + (ac + b)(cd + e)$, men det är knappast självklart, att en enklare realisering är:



Trots att man med ett systematiskt utnyttjande av Boolesk teori relativt enkelt kan bygga upp en schematisk bild av t.ex. ett add-steg i en datamaskin, anses härmed allmänbildningsinformation om teorien för grindar i tillräcklig utsträckning vara lämnad, och avslutningsvis antydes endast, hur kretsar för bildande av 'komplement', 'skärning' och 'union' kan te sig:







Avd. 7 Lösningar till problemen

Problem 1

Kalla personerna A, B och C. Nu antar A, att han är ren i ansiktet. Om det är så, måste B se endast C:s sotiga ansikte, utgående från att han själv (B) är ren. Varför skrattar då även C? Jo, för att B i själva verket också är smutsig. Men B gör ju inget åt detta. Alltså är förutsättningen felaktig, och A är själv smutsig.

(Detta problem existerar i ett otal formuleringar, och kan naturligtvis generaliseras till hur många personer som helst, dock ett begränsat antal.)

Problem 2

Problemet är den s.k. Petersburgparadoxen, som framlades vid ryska hovet i Petersburg av den tyske matematikern L Euler vid mitten av 1700-talet. Många teorier om lösningsmetoder har framlagts sedan dess, bl.a. utgående från hypotesen, att sannolikheten för vinst (eller förlust) inte är exakt 0.5.

Följande resonemang är dock tämligen realistiskt:

Efter n st kast behöver A betala B summan

$$2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n \text{ kronor}$$

Detta är en geometrisk serie, vars summa är

$$2^{n+1} - 2,$$

en funktion, som ökar mycket snabbt med n. Man kan emellertid säga, att även om B hade så mycket som 1 miljon kr på banken, skulle han aldrig kunna betala A om mer än 19 kast utfördes, ty seriens summa för n = 20 överstiger 1 miljon. I detta fall är han alltså skyldig 19 kr, och för vanliga dödliga skulle väl skulden ligga avsevärt lägre.

IA 0.332.03 50.000 11.65 567.185

Problem 3

Vattennivån sjunker. Enligt Archimedes' princip undantränger varje föremål, som flyter på vattnet just så mycket vatten som motsvarar föremålets egen vikt. Eftersom specifika vikten för järn är 7-8 ggr större än vattnets, kommer järnet att tränga undan mycket mer vatten, när det befinner sig i pråmen. Kastas det överbord undantränger det inte mer än vad som motsvarar dess egen volym, och vattenytan sjunker alltså.

Problem 4

Låt oss gå systematiskt tillväga. Antag, att p är påståendet "den vänstra lådan innehåller nyckeln" och q är "svaret är sant". Antag också, att vi vill ha svaret "ja" om p är sant, och "nej" om p är falskt. Följande sanningstabell kan då uppställas:

p	q	Önskat svar	Sannings-värde
1	1	ja	1
1	0	ja	0
0	1	nej	0
0	0	nej	1

För att få fram dessa sanningsvärden (i kolumn 4) resoneras så här för t.ex. rad 2: p är sann, alltså ligger nyckeln i den vänstra lådan, medan q är falsk, och svaret är alltså falskt. Alltså, för att erhålla svaret 'ja' måste 0 sättas som sanningsvärde.

Efter någon eftertanke märker man, att den funktion, som har kolumn 4 som sanningsvärden, är $p \equiv q$ eller möjligen $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Svaret, dvs. frågan lyder alltså: Är påståendet "den vänstra lådan innehåller nyckeln" ekvivalent med påståendet "svaret är sant"? eller möjligen "Är det sant, att den vänstra lådan innehåller nyckeln och svaret är sant, eller att den högra lådan innehåller nyckeln och svaret är falskt?"

Problem 5

Detta problem löses lättast utan hjälp av sanningstabeller. Poängen är nämligen att komma på, att den förste infödingen bara kan svara: "jag är 'svart'", ty är han 'svart', talar han sanning, och är han 'vit', ljuger han. Den tredje blir alltså anställd, ty svaret "Han sade han var 'svart'" är sant, och den tredje är alltså själv 'svart'.

Problem 6

(Problemet från avd. 1)

Omsätt påståendena i symboler:

p: Bröd ska serveras.

q: Glass ska serveras.

r: Pickles ska serveras.

De tre reglerna innebär alltså gemensamt

$$(\neg p \supset q) \wedge \big((p \wedge q) \supset \neg r\big) \wedge \big(r \vee \neg p \supset \neg q\big)$$

Lättare än att förenkla detta uttryck är emellertid följande resonemang (hållande i minnet att $p \supset q$ och $p \wedge \neg q = 0$ har samma innebörd.)

$$\begin{cases} \neg p \wedge \neg q = 0 \\ p \wedge q \wedge r = 0 \\ (r \vee \neg p) \wedge q = 0 \end{cases}$$

Kombinering av dessa ekvationer ger:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee \big((r \vee \neg p) \wedge q\big) = 0$$

Efter förenkling erhålles: $\neg p \vee (q \wedge r) = 0$

Komplementet av båda leden tages: $p \wedge \neg(q \wedge r) = 1$

Detta betyder: "Servera alltid bröd och servera aldrig glass och pickles tillsammans", vilket är det sökta svaret.

Problem 7

Uppenbart är, att man måste försöka använda det faktum, att han talar sanning och ljuger varannan gång. Därur födes tanken att fråga, vad han sade förra gången eller kommer att säga nästa gång. Även utan att använda symboler från den symboliska logiken kan man då få fram, att frågan kan lyda: "Talar du sanning, om du säger, att du svarade 'Den vänstra vägen leder till Kairo' när närmast föregående resenär kom och frågade om vägen?"

En tabell förklarar innebörden:

svar	sanningshalt nu	sanningshalt då	väg till Kairo
ja	1	0	höger
ja	0	1	höger
nej	1	0	vänster
nej	0	1	vänster

Svaret 'ja' innebär alltså, att den högra vägen leder till Kairo, och tvärtom.